الموضوع: المحاضرة الثالثة

مبرهنة كوشي - جورسات:

إذا كانت f تحليلية على وضمن الالتفاف المغلق البسيط C لا يتقطع نفسه

فإن:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

مثال:

$$\int \sin z\,.dz = 0$$

تعريف:

نقول عن نطاق أنه نطاق بسيط الترابط إذا كانت المجموعة المتممة له تتكون من مجموعة واحدة.

أما إذا كانت المتممة تتكون أكثر من مجموعة واحدة فإننا ندعو النطاق بنطاق متعدد الترابط.

مبرهنة: كوشي - جورسات للمناطق المتعددة الترابط:

ليكن C التفاف مغلق بسيط موجه الموجب للدوران ولتكن C_j بحيث $(j=1,\dots,k)$ التفافات مغلقة بسيطة تقع ضمن C في داخلية C وغير متقاطعة مثنى مثنى.

ولتكن f دالة تحليلية على وضمن C وفي خارجية C_j عندئذ:

$$\int_C f(z).dz = \int_{C_1} f(z)dz + \dots + \int_{C_k} f(z).dz$$

مبرهنة: لتكن لدينا f دالة تحليلية على وضمن الالتفاف المغلق البسيط C ولتكن z_0 نقطة من داخلية C عندئذ:

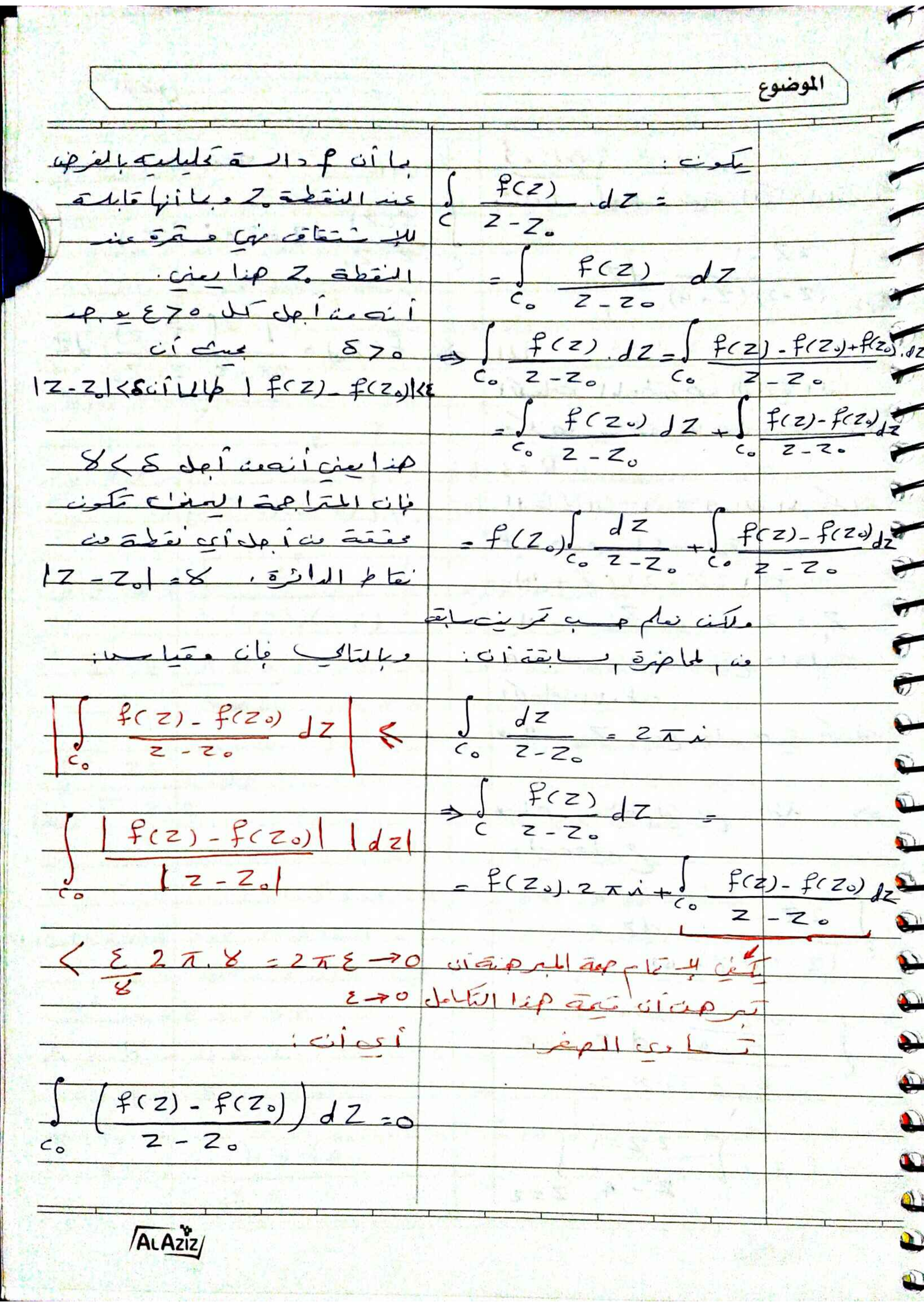
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

الإثبات:

لتكن f دالة تحليلية على وضمن C ولتكن z_0 نقطة من داخلية C ولنحيط النقطة z_0 بدائرة C_0 نصف قطرها صغير بقدر كاف لكي تكون C_0 في داخلية C.

وبهذه الحالة تكون الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ دالة تحليلية على C وخارجية C_0 عندئذ: حسب مبرهنة كوشي جورسات للمناطق المتعددة الترابط يكون:

AlAziz



يكون:

$$\int_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$$\Rightarrow \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\, dz$$

$$= \int_{C_0} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\, dz + \int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz$$

$$= f(z_0)\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} + \int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz$$

ولكن نعلم حسب تمرين سابق من المحاضرة السابقة أن:

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{C} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = f(z_0).2\pi i + \int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz$$

يكفي لإتمام صحة المبرهنة أن نبرهن أن قيمة هذا التكامل تساوي الصفر.

بما أن f دالة تحليلية بالفرض عند النقطة z_0 وبما أنها قابلة للاشتقاق فهي مستمرة عند النقطة z_0 هذا يعني:

أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ لما $|z - z_0| < \delta$

هذا يعني أنه من أجل $r < \delta$ فإن المتراجحة اليمنى تكون محققة من أجل أي نقطة من نقاط الدائرة $|z - z_0| = r$.

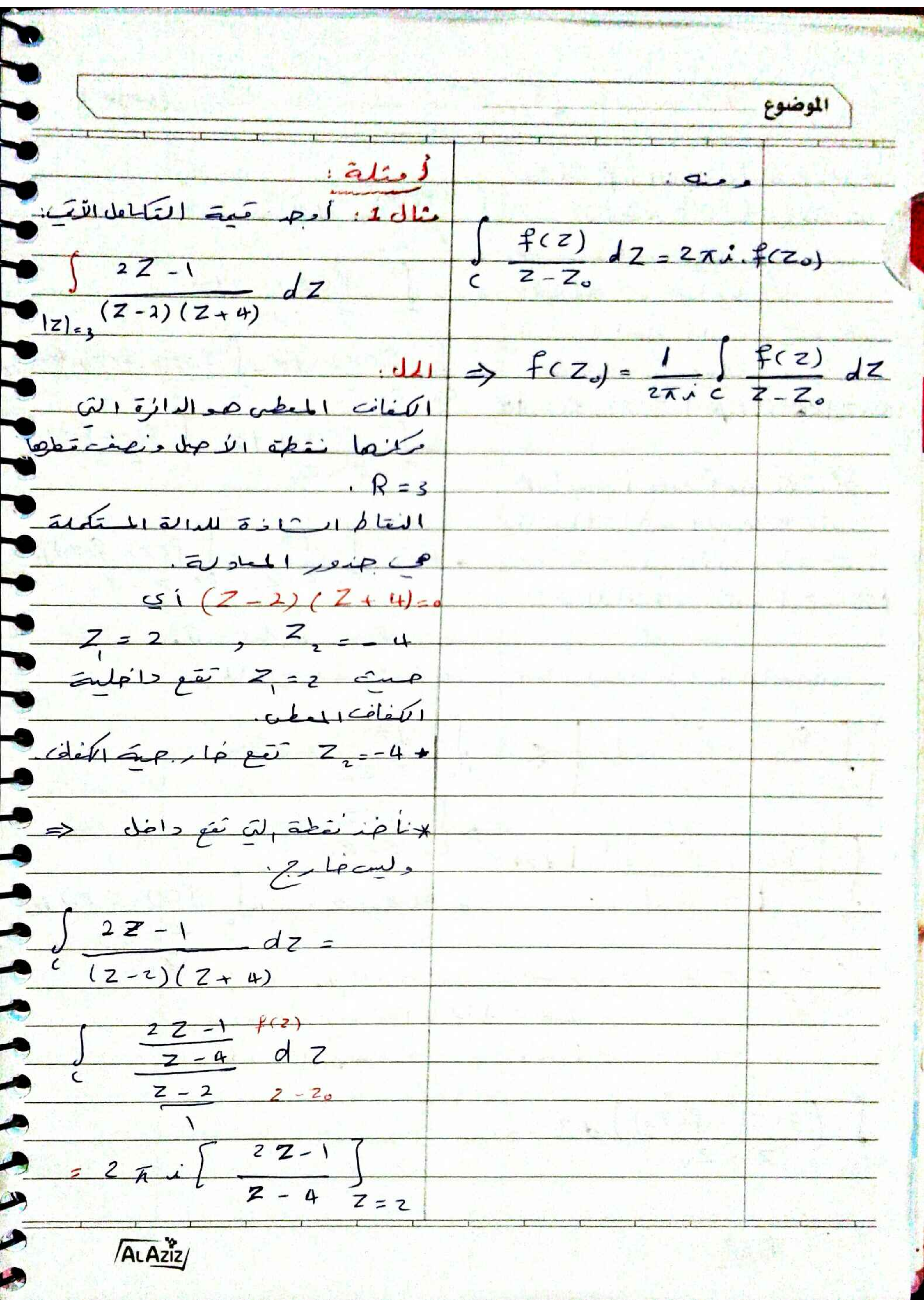
وبالتالي فإن مقياس:

$$\left| \int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| \le \int_{C_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\, |dz|$$

$$< \frac{\varepsilon}{r} 2\pi . r = 2\pi\varepsilon \to 0 \qquad \varepsilon \to 0$$

أي أن:

$$\int_{C_0} \left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right) dz = 0$$



ومنه:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i . f(z_0)$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

أمثلة:

مثال 1: أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{(z-2)(z+4)}\, dz$$

الحل:

الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R = 3$.

النقاط الشاذة للدالة المتكاملة هي جذور المعادلة.

أي $(z-2)(z+4)=0$

$z_1 = 2 \quad , \quad z_2 = -4$

حيث $z_1 = 2$ تقع داخلية الكفاف المعطى.

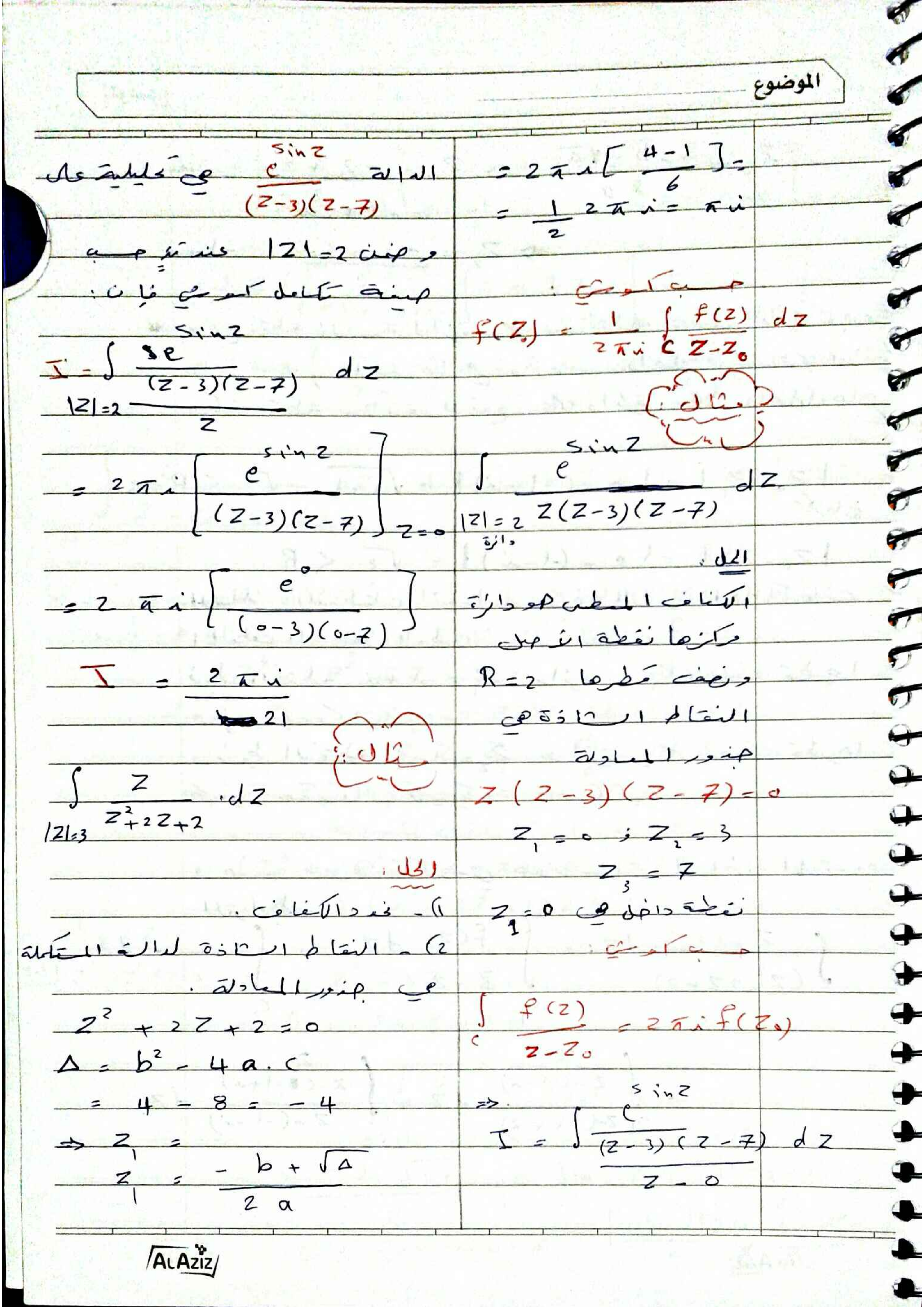
* $z_2 = -4$ تقع خارجية الكفاف.

* نأخذ نقطة التي تقع داخل $\Rightarrow$ وليس خارج.

$$\int_C \frac{2z-1}{(z-2)(z+4)}\, dz =$$

$$\int_C \frac{\frac{2z-1}{z-4}}{\frac{z-2}{1}}\, dz \qquad \frac{f(z)}{z-z_0}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{2z-1}{z-4}\right]_{z=2}$$


الموضوع

$$= 2\pi i\left[\frac{4-1}{6}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\, 2\pi i = \pi i$$

حسب كوشي:

$$f(Z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

مثال:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{\sin z}}{z(z-3)(z-7)}\, dz$$

دائرة

الحل:

الالتفاف المغلق هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=2$

النقاط الشاذة هي جذور المعادلة

$$Z(Z-3)(Z-7)=0$$

$$Z_1=0\ ;\ Z_2=3$$

$$Z_3=7$$

نقطة داخل هي $Z_1=0$

حسب كوشي:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{e^{\sin z}}{(z-3)(z-7)}}{z-0}\, dz$$

الدالة $\frac{e^{\sin z}}{(z-3)(z-7)}$ هي تحليلية على وضمن $|z|=2$ عند تعويض حسب صيغة تكامل كوشي فإن:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\frac{e^{\sin z}}{(z-3)(z-7)}}{z}\, dz$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{\sin z}}{(z-3)(z-7)}\right]_{z=0}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{0}}{(0-3)(0-7)}\right]$$

$$I = \frac{2\pi i}{21}$$

مثال:

$$\int_{|z|=3} \frac{z}{z^2+2z+2}\, dz$$

الحل:

1) نحدد الالتفاف.

2) النقاط الشاذة للدالة المتكاملة هي جذور المعادلة.

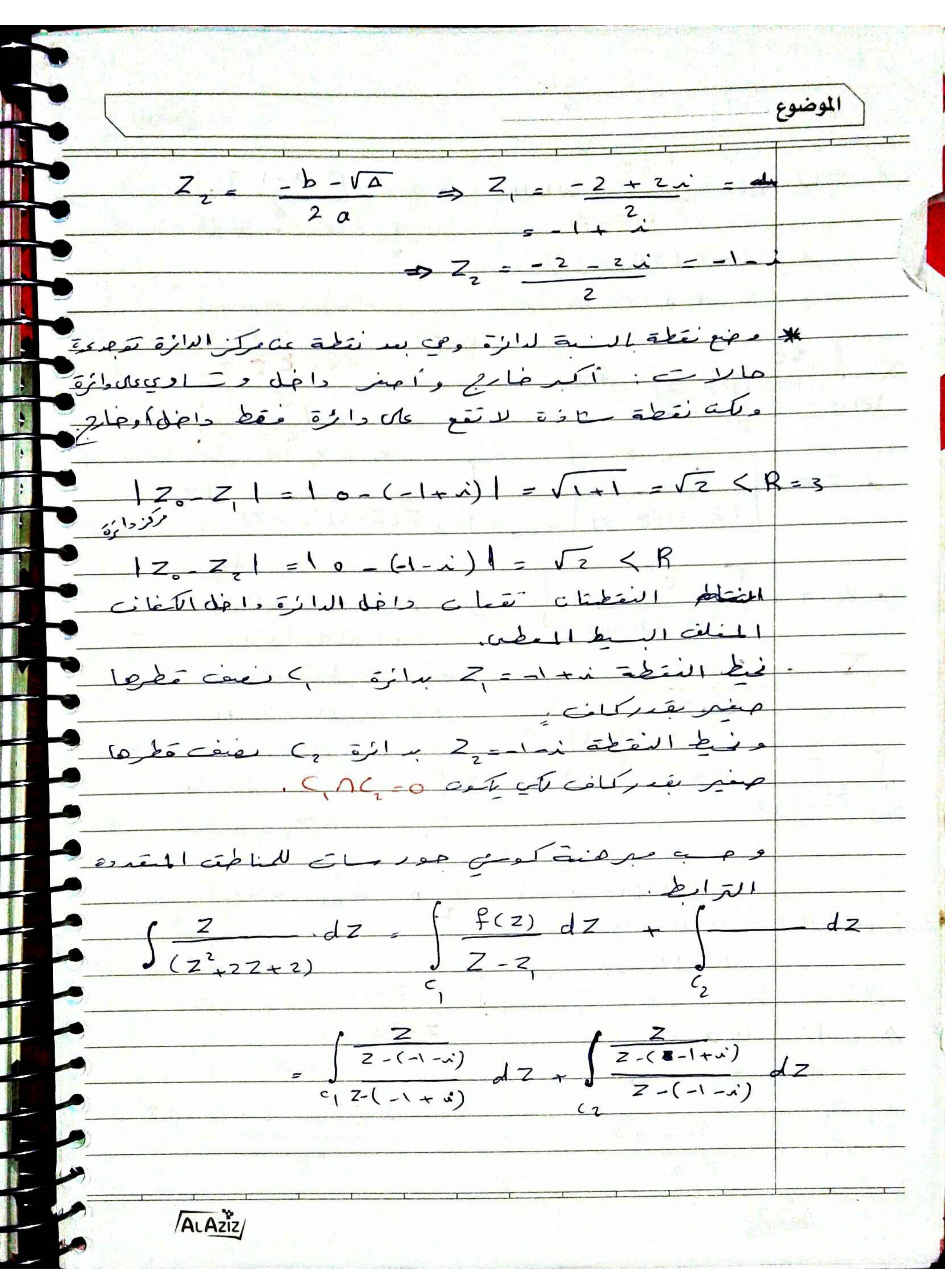
$$z^2+2z+2=0$$

$$\Delta = b^2 - 4a.c$$

$$= 4 - 8 = -4$$

$$\Rightarrow z_1 =$$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$



$$Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow Z_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

* موضع نقطة بالنسبة لدائرة وهي بعد نقطة عن مركز الدائرة توجد 3 حالات: أكبر خارج وأصغر داخل وتساوي على دائرة ولكن نقطة شاذة لا تقع على دائرة فقط داخل أو خارج

$$|Z_0 - Z_1| = |0-(-1+i)| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < R = 3$$

مركز دائرة

$$|Z_0 - Z_2| = |0-(-1-i)| = \sqrt{2} < R$$

النقطتان تقعان داخل الدائرة داخل الكفاف المغلق البسيط المعطى.

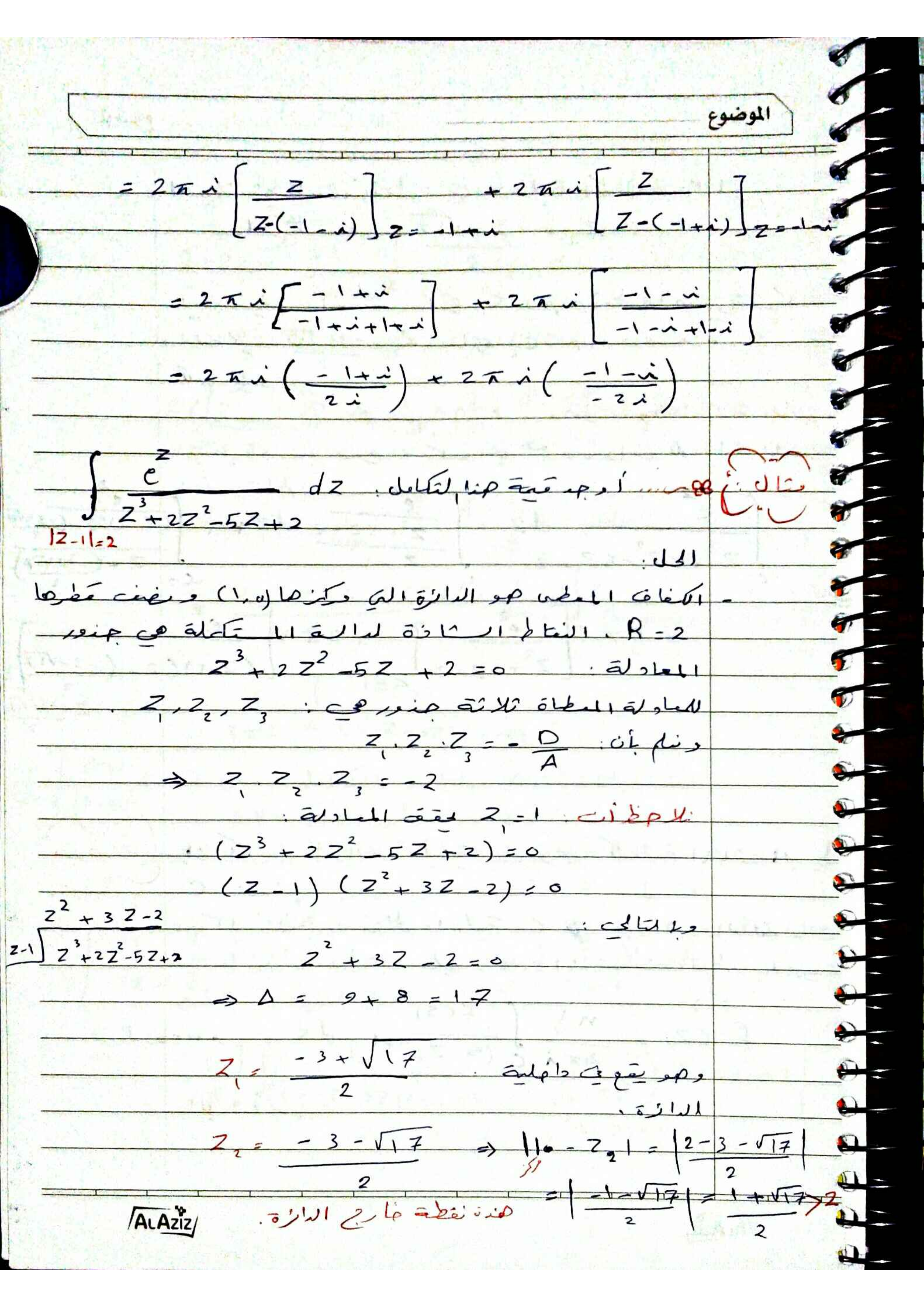
نحيط النقطة $Z_1 = -1+i$ بدائرة C_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف،

ونحيط النقطة $Z_2 = -1-i$ بدائرة C_2 نصف قطرها صغير بقدر كاف لكي يكون $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

وحسب مبرهنة كوشي جورسات للمناطق المتعددة الترابط:

$$\int \frac{Z}{(Z^2+2Z+2)}dZ = \int_{C_1} \frac{f(Z)}{Z-Z_1}dZ + \int_{C_2} ____ \, dZ$$

$$= \int_{C_1} \frac{\frac{Z}{Z-(-1-i)}}{Z-(-1+i)}dZ + \int_{C_2} \frac{\frac{Z}{Z-(-1+i)}}{Z-(-1-i)}dZ$$



الموضوع

$$= 2\pi i \left[\frac{z}{z-(-1-i)}\right]_{z=-1+i} + 2\pi i \left[\frac{z}{z-(-1+i)}\right]_{z=-1-i}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{-1+i}{-1+i+1+i}\right] + 2\pi i \left[\frac{-1-i}{-1-i+1-i}\right]$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-1+i}{2i}\right) + 2\pi i \left(\frac{-1-i}{-2i}\right)$$

مثال: أوجد قيمة هذا التكامل: $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^{z}}{z^3+2z^2-5z+2}\,dz$

الحل:

- الالتفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها $(0,1)$ ونصف قطرها $R=2$. النقاط الشاذة لدالة المتكاملة هي جذور المعادلة: $z^3+2z^2-5z+2=0$

للمعادلة المعطاة ثلاثة جذور هي: z_1, z_2, z_3.

ونعلم بأن: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\frac{D}{A}$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -2$

ملاحظات: $z_1 = 1$ يحقق المعادلة:

$(z^3+2z^2-5z+2)=0$

$(z-1)(z^2+3z-2)=0$

$z-1 \,)\, z^3+2z^2-5z+2 \quad \to \quad z^2+3z-2$

وبالتالي:

$z^2+3z-2=0$

$\Rightarrow \Delta = 9+8 = 17$

$z_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ وهو يقع في داخلية الدائرة.

$z_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow |1 - z_2| = \left|\frac{2-3-\sqrt{17}}{2}\right|$

$= \left|\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right| = \frac{1+\sqrt{17}}{2} > 2$

هذه نقطة خارج الدائرة.

AlAziz

الموضوع

لدينا نقطتان تقعان في داخلية الكفاف هما :

$$z_1 = 1 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

بحيث نحيط $z_1 = 1$ بدائرة c_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف وبالتالي $z_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ بدائرة c_2 = = = = بحيث يكون

$c_1 \cap c_2 = \phi$ وهو يقع في داخلية الدائرة.

عندئذ حسب مبرهنة كوشي حول مسارات المناطق المتعددة الارتباط :

$$\int_c \frac{e^z}{z^3+2z^2-5z+2}\,dz = \int_{c_1} \frac{\frac{e^z}{z^2+3z-2}}{z-1}\,dz + \int_{c_2} \frac{\frac{e^z}{(z-1)\left(z-\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\right)}}{z-\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)}$$

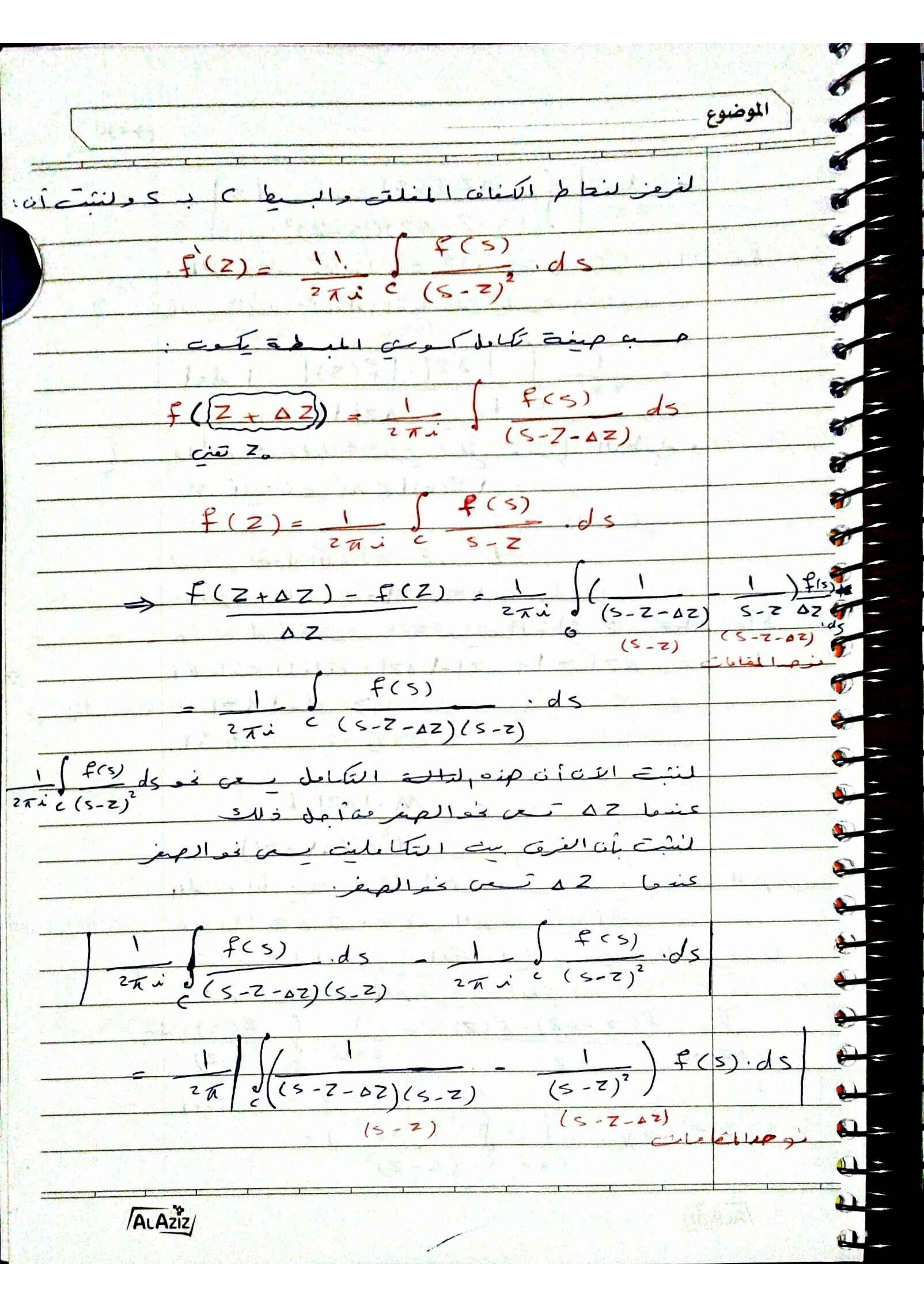
$$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{z^2+3z-2}\right]_{z=1} + 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-1)\left(z-\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\right)}\right]_{z=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}}$$

مبرهنة : إذا كانت f دالة تحليلية على وضمن الكفاف المغلق البسيط C عندئذ :

عند كل نقطة من نقاط داخلية C فإن هذه الدالة تملك مشتقات من مراتب عليا وهذه المشتقات تعطى بالصيغة

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds \quad ; n=0,1,2,\dots$$

الإثبات :



لنفرض لنقاط الالتفاف المغلق والبسيط C بـ ك ولنثبت أن:

$$f'(z) = \frac{1!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,ds$$

حسب صيغة تكامل كوشي المبسطة يكون:

$$f(z+\Delta z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)}\,ds$$

z_0 تعني

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s-z}\,ds$$

$$\Rightarrow \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{1}{(s-z-\Delta z)} - \frac{1}{s-z}\right)\frac{f(s)}{\Delta z}\,ds$$

$(s-z)$ $(s-z-\Delta z)$ نوحد المقامات

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)}\,ds$$

لنثبت الآن أن هذه الدالة التكامل يسعى نحو $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}ds$
عندما Δz تسعى نحو الصفر ومن أجل ذلك
لنثبت بأن الفرق بين التكاملين يسعى نحو الصفر
عندما Δz تسعى نحو الصفر.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,ds\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \left(\frac{1}{(s-z-\Delta z)(s-z)} - \frac{1}{(s-z)^2}\right) f(s)\,ds\right|$$

$(s-z)$ $(s-z-\Delta z)$ نوحد المقامات

ALAZIZ

الموضوع

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int \frac{\Delta z\, f(s)}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2} ds \right|$$

وبالاعتماد على ما جاء سابقة (مقياس التكامل أصغر أو يساوي تكامل المقياس) يكون:

$$= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|\Delta z| \cdot |f(s)|}{|s-z-\Delta z|\, |s-z|} |ds|$$

بما أن f تحليلية فهي تبلغ قيمتها العظمى ولتكن M أي أن $|f(s)| \leq M$.

- لنرمز لطول الالتفاف c بـ L.
ولنرمز لـ $|s-z| = d$
- حيث d أصغر مسافة بين النقطة z و نقاط الالتفاف المغلق: $|s-z-\Delta z| \geq |s-z| - |\Delta z|$
$\geq d - |\Delta z|$

بناءً على ما سبق يكون:

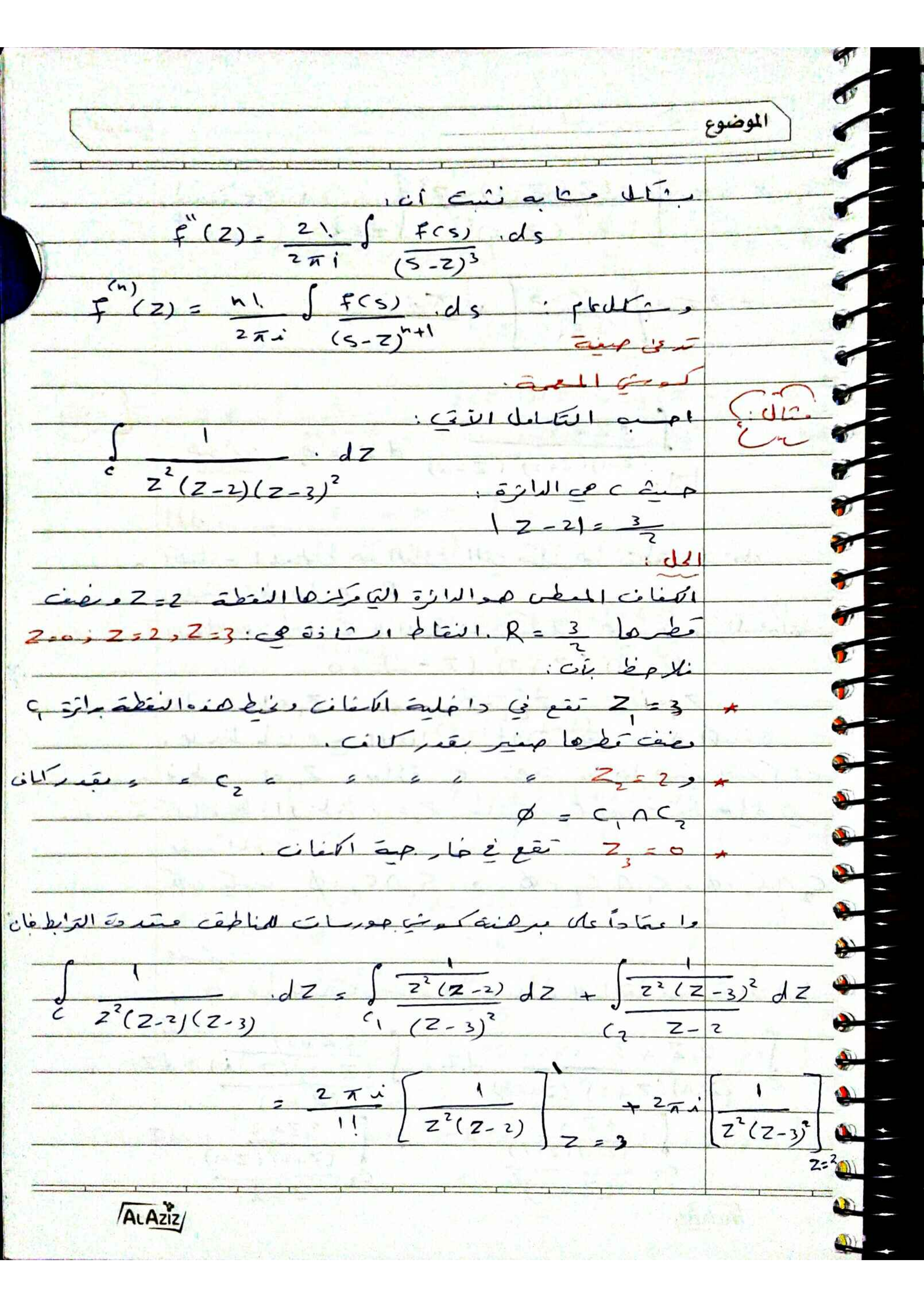
$$\leq \frac{M \cdot |\Delta z| \cdot L}{d^2 (d - |\Delta z|)}$$

الطرف الأيمن من المتراجحة السابقة يسعى نحو الصفر عندما Δz تسعى نحو الصفر أي أن
مقياس الفرق بين التكاملين يسعى نحو الصفر عندما Δz تسعى نحو الصفر وهذا يعني أن:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)} ds$$

أي أن:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2} \cdot ds$$



الموضوع

بشكل مشابه نثبت أن:

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int \frac{f(s)}{(s-z)^3}\,ds$$

وبشكل عام:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds$$

تدعى صيغة
كوشي المعممة.

مثال:

احسب التكامل الآتي:

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-2)(z-3)^2}\,dz$$

حيث C هي الدائرة:

$$|z-2| = \frac{3}{2}$$

الحل:

الالتفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها النقطة $z=2$ ونصف قطرها $R=\frac{3}{2}$. النقاط الشاذة هي: $z=0$; $z=2$, $z=3$

نلاحظ بأن:

* $z_1 = 3$ تقع في داخلية الالتفاف ونحيط هذه النقطة بدائرة C_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف.
* و $z_2 = 2$ " " " " " C_2 " " بقدر كاف

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

* $z_3 = 0$ تقع في خارجية الالتفاف.

واعتماداً على مبرهنة كوشي-غورسات للمناطق متعددة الترابط فإن:

$$\int_C \frac{1}{z^2(z-2)(z-3)}\,dz = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{z^2(z-2)}}{(z-3)^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{\frac{1}{z^2(z-3)^2}}{z-2}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{1}{z^2(z-2)}\right]'_{z=3} + 2\pi i\left[\frac{1}{z^2(z-3)^2}\right]_{z=2}$$

AlAziz